ディラックモノポールへの幾何学的アプローチとゲージ表現に関する研究

金導賢（大阪大学　理学部）

学生アイデアファクトリー

本研究の概要

従来の量子力学 (QM)・場の量子論 (QFT) では、**ゲージ理論**と**正準量子化**は別の独立的なものとして扱っていた。本研究では今までの実験的事実などをすべて無くし、電磁場のU(1) ゲージ対称性のみを仮定しても、この場の U(1) ゲージ対称性・その他幾何学的要請から直ちに電荷量子化が導くことを目指す。ゆえに、宇宙のどこかにモノポールがあるとすれば、**電荷量子化・角運動量量子化**が自然に導かれる。

ここで**図 1** の示す**立体角 (solid angle)** は以下のように定式化できる:

立体角の定式化 (Formalism of solid angle)

$$\Omega_{\mathbf{n}\to\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) \underset{\text{Stoke's Thm}}{=} \int_\sigma \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{3}$$

式 (2) のベクトルポテンシャルのジョルダン積分表示を**図 1** の string 回転において書くと Stoke's 定理より、ゲージ変換と string の回転変換を以下のように関係付けることができる:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r}) = g\boldsymbol{\nabla}\Omega_{\mathbf{n}\to\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) - 4\pi g\int_\sigma \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\nabla}\lambda(\mathbf{r}). \tag{4}$$

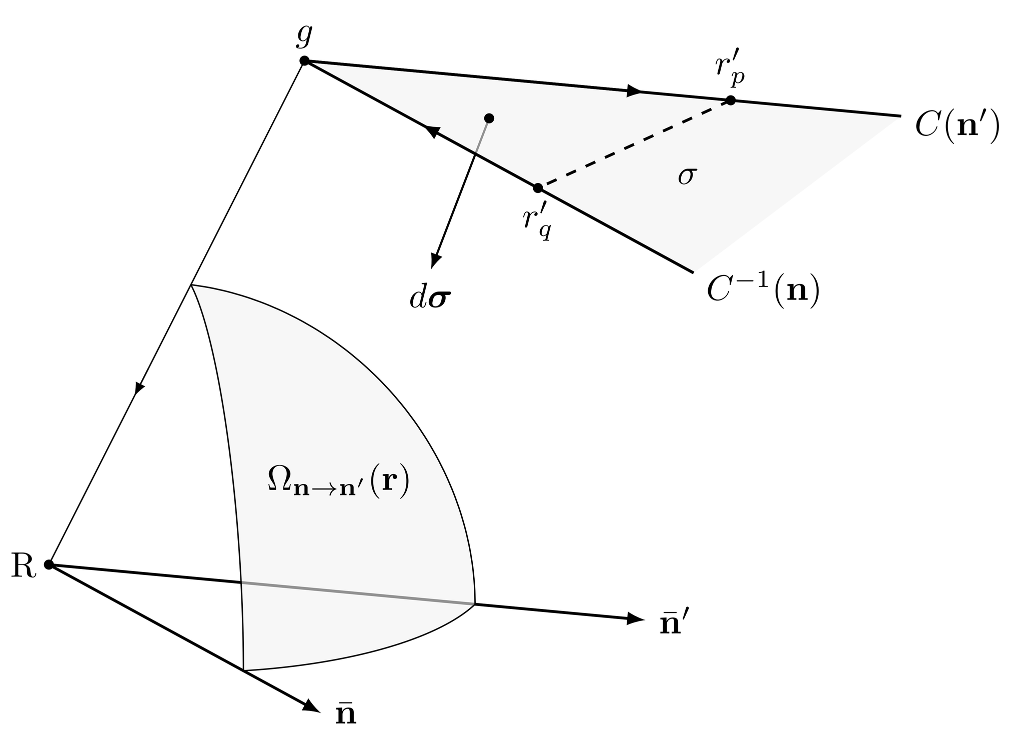

図 1: String($\mathbf{n}$ と $\mathbf{n}'$) における視点 $\mathbf{r}$ での立体角.

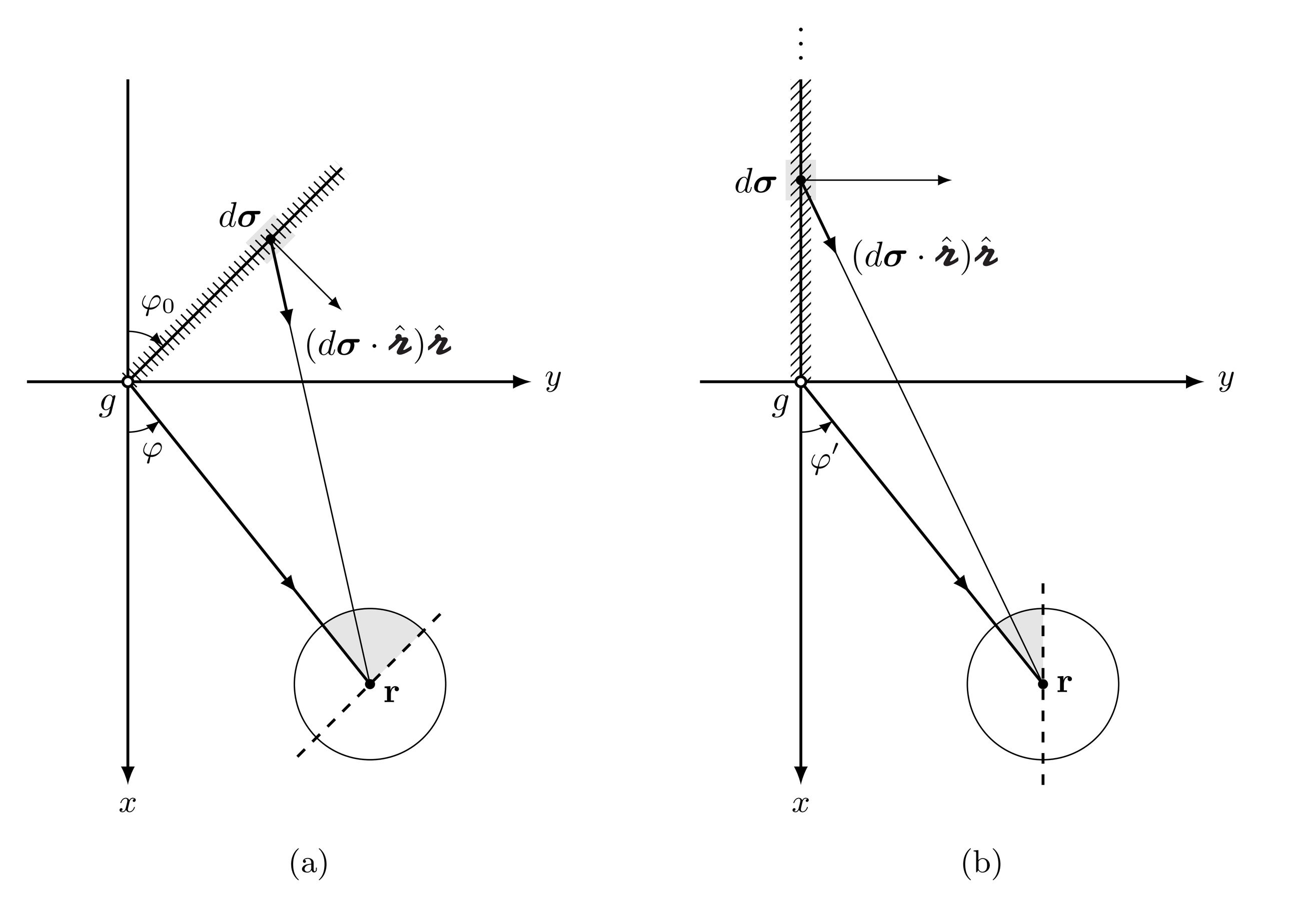

図 3: String の回転における座標系の循環性.

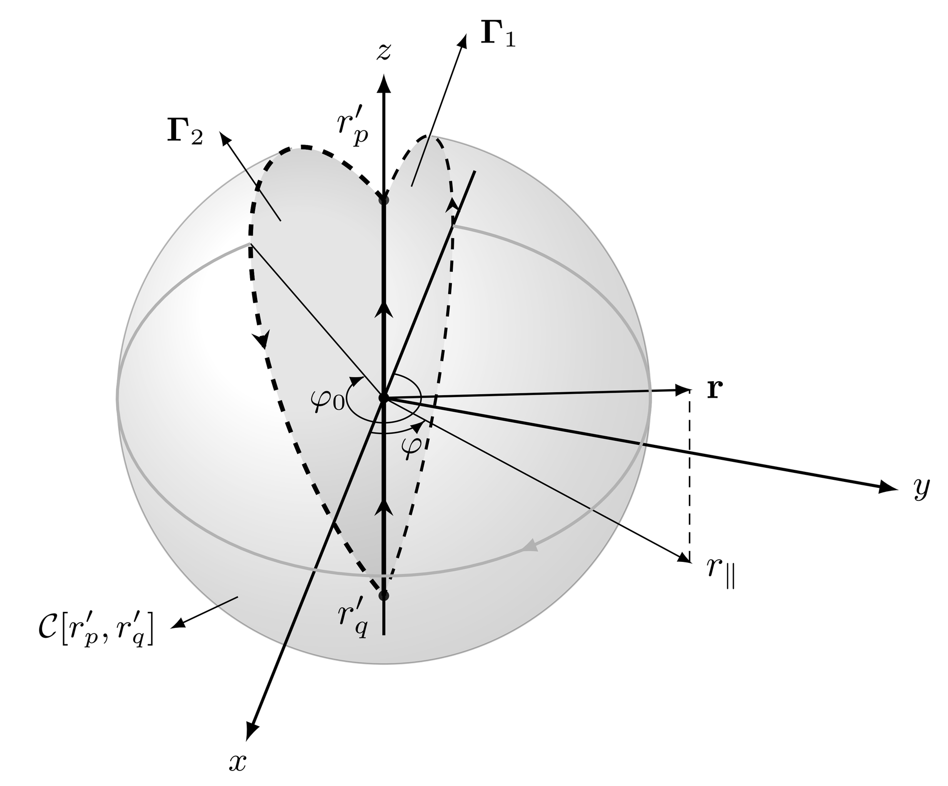

図 5: 式 (3.8) および式 (3.9) の積分経路.

この位相ゲージ変換 (**図 5** 参照) においてのベクトルポテンシャルのジョルダン積分表現について考察する。表面項の積分まで入れて計算すれば:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{r'_p, r'_q\to\infty} g\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial\boldsymbol{\Gamma}_i(r'_p,r'_q)} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&\qquad - g\int_{C_a[r'_q,r'_p]+C_b[r'_p,r'_q]} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&= g\boldsymbol{\nabla}\left(\Omega_{\mathbf{n}\to\mathbf{n}'}(\mathbf{r}) + \Omega_{\mathbf{n}'\to\mathbf{n}}(\mathbf{r}) - \lim_{r'_p,r'_q\to\infty}\int_{\mathcal{C}[r'_p,r'_q]} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) \\
&= \boldsymbol{\nabla}\xi
\end{aligned} \tag{7}$$

ゆえに、式 (7) の微分演算子の中身がベクトル $\mathbf{r}$ によらない定数になることが分かる。ガウスの定理により、スカラー関数 ξ 以下のように評価される:

$$\begin{aligned}
\xi &= g\oint_{\boldsymbol{\Gamma}_1+\boldsymbol{\Gamma}_2-\mathcal{C}_\infty} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot d\boldsymbol{\sigma}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \underset{\text{Gauss' Thm.}}{=} -g\int_\tau \nabla'^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\Sigma \\
&= 4\pi g\theta_\pi(\varphi_0 - \varphi).
\end{aligned} \tag{8}$$

一方，位相ゲージ変換は第二ゲージの string 変換領域 σ_- の方位角 $0<\varphi_0<2\pi$ に対して、$U_+(0)U_-(\varphi_0) = e^{-2ieg\varphi_0}$ が成立するのでこの位相ゲージ変換は以下のような方程式を満たす:

半平面ストリングのゲージ方程式 (Gauge equation of half-plane string)

$$e^{-2ieg\varphi_0} = \exp\left(4\pi ieg\theta_\pi(\varphi_0-\varphi) + ieg\int_{\mathcal{C}_\infty} \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) \tag{10}$$

ここで両辺に極限 $\varphi_0 \to 2\pi-$ を取ると、$e^{-4\pi ieg} = 1$ が得られ、電荷量子化を以下のように得る:

$$\boxed{eg = -\frac{l}{2}\,, \qquad (l = \pm1, \pm2, \cdots)} \tag{11}$$